Les Développements Limités

Yéro Diamanka
Foundations of Mathematics

Definition f admet un développement limité d'ordre n en 0 s'il existe un polynôme $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$f(x) = \lim_{x\to 0} P(x) + o(x^n) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + o(x^n)$$

Plus généralement, f admet un développement limité d'ordre n en le réel x_0
il existe un polynôme $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$f(x) = \lim_{x\to x_0} P(x-x_0) + o(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n$$

On lit donc l'ordre du développement dans le $o()$ et pas ailleurs.

$$\sin(x) = \lim_{x\to 0} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

est le développement limité de sin en 0 à l'ordre 3 et $\sin(x) = \lim_{x\to 0} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$
est le développement limité de sin en 0 à l'ordre 4.
Un développement limité est unique en cas d'existence ou encore on peut identifier les coefficients de deux développements limités égaux.
$P(x)$ (resp. $P(x-x_0)$) est la partie régulière du développement limité à l'ordre n du développement limité de f à l'ordre n en 0 (resp. x_0).
Théorème : Si f admet un DL d'ordre n en 0 et est paire (resp. impaire), les coefficients a_{2k+1} (resp. a_{2k}) sont tous nuls.

Quelques Formules à connaître

Formule de Taylor – Lagrange :

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe C^n et de classe $C^{(n+1)}$ sur $]a,b[$, alors pour tout $x_0 \in [a,b]$ et tout $x \in [a,b]$, il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^1}{1!} f^{(1)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Formule de Mac – Laurin :

Si $x_0 = 0 \in [a,b]$, alors pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$f(x) = f(0) + \frac{(x)^1}{1!} f^{(1)}(0) + \frac{(x)^2}{2!} f^{(2)}(0) + \ldots + \frac{(x)^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{(x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Formule de Taylor – Young :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^1}{1!} f^{(1)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$$

Formule de Mac Laurin – Young :

$$f(x) = f(0) + \frac{(x)^1}{1!} f^{(1)}(0) + \frac{(x)^2}{2!} f^{(2)}(0) + \ldots + \frac{(x)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x)^n \varepsilon(x)$$

Formule de Taylor avec Reste de l'intégrale :

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)^1}{1!} f^{(1)}(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(x) dx$$

Et donc nous pouvons dire que :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + R(x, x_0)}$$

Avec le reste, qui selon les Taylor diffèrent.

Rappel : $f^{(0)}$: dérivée 0 fois de f, c'est-à-dire $f^{(0)} = f$ (on a pas dérivé f). $f^{(1)}$: dérivée première de f, c'est-à-dire $f^{(1)} = f'$ (on a dérivé une fois f). Et f est de classe C^n sur $[a,b]$ signifie que f est n fois dérivable sur $[a,b]$ et que sa n-ième dérivée est continue sur $[a,b]$.

Les Développements Limités Usuels à Savoir

Dans cette section, on donne les développements limités à tout ordre des fonctions usuelles au point $x_0 = 0$. Ces DL sont à connaître absolument !

1. Au voisinage de $x = 0$, le DL de e^x est :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

2. Au voisinage de $x = 0$, le DL de $\ln(1 + x)$ est :

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

3. Au voisinage de $x = 0$, le DL de $\ln(1 - x)$, pour $|x| < 1$ est :

$$\ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

4. Au voisinage de $x = 0$, le DL de $\sin(x)$ est :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!} + o(x^{2n+3})$$

5. Au voisinage de $x = 0$, le DL de $\cos(x)$ est :

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+2})$$

6. Au voisinage de $x = 0$, le DL de $\arctan(x)$, pour $|x| < 1$ est :

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} + o(x^{2n+3})$$

7. Au voisinage de $x = 0$, le DL de $\arcsin(x)$, pour $|x| \leq 1$ est :

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} + o(x^{2n+3})$$

8. Au voisinage de $x = 0$, le DL de $\arccos(x)$, pour $|x| \leq 1$ est :

$$\arccos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n + 1} + o(x^{2n+3})$$

9. Au voisinage de $x = 0$, le DL de $\cosh(x)$ est :

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+2})$$

10. Au voisinage de $x = 0$, le DL de $\sinh(x)$ est :

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+3})$$

11. Au voisinage de $x = 0$, le DL de $\frac{1}{1-x}$, pour $|x| < 1$. est :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + o(x^n)$$

12. Au voisinage de $x = 0$, le DL de $\frac{1}{1+x}$, pour $|x| < 1$ est :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + o(x^n)$$

13. Au voisinage de $x = 0$, le développement limité de $(1+x)^\alpha$ est :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$$

Quelques Exemples ou Exercices Peu importe

Exercice 1.

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $[0,\ 1]$ telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$. On définit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(1-x) - f(x)$.
1. Justifier que g est bien définie et de classe C^2 sur $[0,\ 1]$.
Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $1 - x \in [0, 1]$, donc g est bien définie sur $[0, 1]$.
De plus, f et $x \mapsto 1 - x$ sont de classe C^2 sur $[0, 1]$, donc g est de classe C^2 sur $[0, 1]$.
2. calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ en fonction des dérivées de f
Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$g'(x) = -f'(1-x) - f'(x)$$

$$g''(x) = f''(1-x) - f''(x)$$

3.) Calculer $g(0)$, $g'(0)$ et $g''(\frac{1}{2})$.
On a :

$$g(0) = f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1$$

$$g'(0) = -f'(1) - f'(0) = -0 - 0 = 0$$

$$g''\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

4. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $g''(c) = -8$.
Comme g est de classe C^2 sur $[0,1]$, par la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = g(0) + g'(0) \times \frac{1}{2} + g''(c) \times \frac{1}{2^2}$$

Donc,

$$0 = 1 + \frac{g''(c)}{8}$$

et $g''(c) = -8$.
5. En déduire qu'il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $|f''(\alpha)| \geq 4$.
Supposons par l'absurde que pour tout $\alpha \in [0,1]$, $|f''(\alpha)| < 4$. Alors, on a

$$|g''(c)| = |f''(1-c) - f''(c)| \leq |f''(1-c)| + |f''(c)|$$

par inégalité triangulaire

$$< 4 + 4 = 8$$

ce qui est une contradiction. Ainsi, il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $|f''(\alpha)| \geq 4$.

Exercie 2

Calculons la limite de $xG(x) = x\left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt[3]{x^3+3x^2+1}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Nous avons une forme indéterminée. Pour la lever, calculons les DL(0) des fonctions g et h à l'ordre 2 :

$$g(t) = \sqrt{1+2t} = 1 + t - \frac{1}{2}t^2 + o\left(t^2\right) \qquad \text{et} \qquad h(t) = \sqrt[3]{1+3t+t^3} = 1 + t - \frac{2}{3}t^2 + o\left(t^2\right)$$

Alors $g(t) - h(t) = \frac{1}{6}t^2 + o\left(t^2\right)$. En effectuant le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, on obtient

$$xG(x) = x^2\left(g\left(\frac{1}{x}\right) - h\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x^2\left(\frac{1}{6}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{6} + o(1)$$

lorsque $x \to +\infty$.
Conclusion : $\lim_{x\to+\infty} xG(x) = \frac{1}{6}$.

Exercice 3

Soient $a, b > 0$. Calculons la limite de $H(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ lorsque x tend vers 0 .
On remarque que $H(x) = \exp\left(\frac{1}{x}f(x)\right)$, avec

$$f(x) = \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right).$$

Nous avons une forme indéterminée, car $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = \ln(1) = 0$.
Calculons le DL_1 de f en 0 . Nous avons $a^x = e^{x \ln(a)} = 1 + x\ln(a) + o(x)$ et $b^x = 1 + x\ln(b) + o(x)$ en 0 , ainsi

$$f(x) = \ln(1 + \theta x + o(x))$$

avec $\theta = \frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}$. Si nous utilisons le DL_1 de $\ln(1+t)$ en $0, \ln(1+t) = t + o(t)$, nous obtenons

$$f(x) = \theta x + o(x)$$

lorsque $x \to 0$. Finalement $\frac{1}{x} f(x) = \theta + o(1)$ tend vers θ lorsque $x \to 0$.
Conclusion : $\lim_{x \to 0} H(x) = \exp(\theta) = \sqrt{ab}$.

Exercice 4

Considérons la suite $V_n = n\left(\ln(n) + \ln\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right), n \geq 1$.
Pour comprendre le comportement de la suite (V_n), on utilise la fonction $G(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right), x > 0$. On remarque que

$$V_n = nG\left(\frac{1}{n}\right), \quad \forall n \geq 1$$

Voici le DL_3 de G en 0 : $G(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 + o\left(x^3\right)$. En effectuant le changement de variables $x = \frac{1}{n}$, obtient un développement asymptotique de la suite (V_n) :

$$V_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{24n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Exercice 5

Dans cet exemple, nous allons étudier une suite qui est définie d'une manière différente que dans les exemples précédents.
La fonction $H(x) = \tan(x) - x$ est définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$. Considérons les intervalles

$$I_n =]\frac{-\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[,$$

pour $n \in \mathbb{N}$.
Etudions la fonction H sur chaque intervalle I_n. On voit que $H'(x) = \tan(x)^2 \geq 0$, donc H est strictement croissante sur I_n. De plus $\lim_{x \to \left(\frac{-\pi}{2} + n\pi\right)^+} H(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^-} H(x) = +\infty$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in I_n$ tel que $H(x_n) = 0$.
Question : Calculons un développement asymptotique de la suite (x_n).
Étape 1 : Commençons par remarquer que $x_n \in I_n \Longrightarrow |x_n - n\pi| \leq \frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$x_n = n\pi + O(1). \tag{1}$$

Étape 2 : Posons $x_n = n\pi + v_n^0$. On a $v_n^0 \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et la relation $\tan(x_n) = x_n$ donne

$$\tan\left(v_n^0\right) = n\pi + v_n^0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ici on a utilisé le fait que $\tan(\pi + x) = \tan(x)$. Cela implique que $v_n^0 = \arctan\left(n\pi + v_n^0\right)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque $n \to \infty$. On obtient un raffinement de (31) :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1) \tag{2}$$

Étape 3 : Posons $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - v_n^1$. Ici (v_n^1) est une suite de termes strictement positifs tendant vers 0 . La relation $\tan(x_n) = x_n$ donne

$$\frac{\cos\left(v_n^1\right)}{\sin\left(v_n^1\right)} = n\pi + \frac{\pi}{2} - v_n^1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

On a utilisé le fait que $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
Comme (v_n^1) tend vers 0 , on a

$$\frac{1}{v_n^1} \sim \frac{\cos\left(v_n^1\right)}{\sin\left(v_n^1\right)} = n\pi + \frac{\pi}{2} - v_n^1 \sim n\pi$$

En d'autres termes $v_n^1 \sim \frac{1}{n\pi}$. On obtient ainsi un raffinement de (2) :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4}$$

Étape 4 : Posons $v_n^1 = \frac{1}{n\pi} + v_n^2$, avec $v_n^2 = o\left(\frac{1}{n}\right)$. L'équation (3) donne la relation

$$\cos\left(\frac{1}{n\pi} + v_n^2\right) = \sin\left(\frac{1}{n\pi} + v_n^2\right)\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{5}$$

Utilisons le fait que $\cos\left(\frac{1}{n\pi} + v_n^2\right) = 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et que $\sin\left(\frac{1}{n\pi} + v_n^2\right) = \frac{1}{n\pi} + v_n^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Alors (5) donne

$$\begin{aligned} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) &= \left(\frac{1}{n\pi} + v_n^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2n} + n\pi v_n^2 + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$v_n^2 = \frac{-1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On obtient ainsi a raffinement de (4) :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Conclusion : on pourrait continuer ce procédé pour obtenir des développements asymptotiques de la suite (x_n) de plus en plus précis.

Importante

La formule de Taylor-Young permet aussi de calculer facilement les DL à tous ordres.
En admettant que les développements limités de la fonction exponentielle restent vrais pour des variables complexes, savoir retrouver les DL de sinus et cosinus à l'aide de la décomposition en partie réelle et partie imaginaire $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ nous permet de réduire les formules à connaître. Et aussi un autre DL très utile à connaître est celui de $(1+x)^\alpha$.
Attention, les DL peuvent s'intégrer (se primitiver), mais il n'est pas possible de dériver des DL.
On se contente dans bien des exercices de considérer les développements limités en 0. Pour le cas général, on peut toujours s'y ramener en posant $y = x - x_0$ (qui équivaut à $x = y + x_0$). On a bien $y \to 0$ si et seulement si $x \to x_0$. Il faut alors exprimer f en fonction de y, faire le DL en $y \to 0$ puis revenir à la variable x.

On profite également pour faire l'observation suivante : « avoir $f'(x_0) > 0$ **n'implique pas** que la fonction f soit croissante sur un voisinage de x_0 ». Par exemple, on pourra étudier la fonction donnée par $f(x) = x + x^2\cos(\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Cette fonction est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée en 0 est $f'(0) = 1 > 0$. Pourtant, f n'est croissante sur aucun voisinage de 0.
Ce fait est certainement contre-intuitif. On retrouve le résultat qu'on imagine si on fait une hypothèse supplémentaire de continuité de la dérivée.

Astuce : ***On fait le DL si la fonction f, n'est pas un polynôme. Sinon, ça n'a aucun sens.***

Les développements limités sont très importants dans les chapitres à venir comme par exemples sur les intégrales Généralisées, calcul de limites, les séries numériques, séries de fonctions, séries entières, calcul différentiel ... .
La formule de Taylor-Lagrange est à connaître par cœur.